LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

3. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna równa jest A. Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
25 lutego 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE. Proste BM i CN przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Uwaga. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

5. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.

6. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby $x, y \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. Wykazać, że jeśli liczba $x(p-x)y(p-y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $x = y$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba n^2+np jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Niech $k > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $n^2 + np = k^2$. Wtedy

$$0 = 4n(n+p) - 4k^2 = (2n+p)^2 - 4k^2 - p^2 = (2n+p-2k)(2n+p+2k) - p^2.$$

Stąd $p^2 = (2n+p-2k)(2n+p+2k)$. Ponieważ $2n+p+2k > 0$, więc również $2n+p-2k > 0$. Liczba p jest pierwsza oraz $2n+p-2k < 2n+p+2k$, zatem $2n+p-2k$ jest dodatnim dzielnikiem p^2, mniejszym od p, więc $2n+p-2k = 1$ i $2n+p+2k = p^2$. Dodając stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy $4n+2p = p^2+1$, czyli $n = (\frac{p-1}{2})^2$. Udowodniliśmy, że jeśli liczba n istnieje, to $n = (\frac{p-1}{2})^2$, więc istnieje nie więcej niż jedno n.

Jeśli $n = (\frac{p-1}{2})^2$, to n jest liczbą całkowitą, bo p jest nieparzyste, oraz

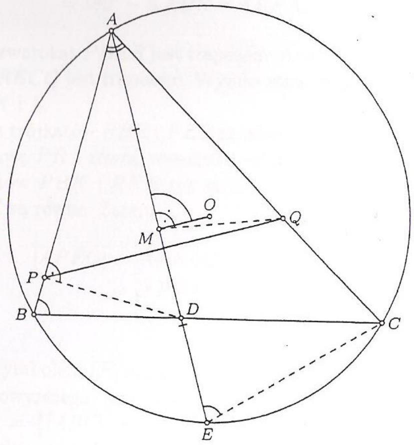
$$n(n+p) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + p\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\frac{p+1}{2}\right)^2,$$

zatem $n(n+p) = k^2$ dla $k = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}$. Wobec tego jedyną liczbą całkowitą dla której n^2+np jest kwadratem liczby całkowitej jest $(\frac{p-1}{2})^2$. □

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

Rozwiązanie:

Sposób I: Załóżmy, że prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E i oznaczmy przez M środek odcinka AE (rys. 1).



rys. 1

Pole czworokąta $BCQP$ jest równe polu trójkąta APQ wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta APQ stanowi połowę pola trójkąta ABC. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta dostajemy równość

$$\frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot \sin\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\sphericalangle BAC$$

lub równoważnie $2AP \cdot AQ = AB \cdot AC$.

Trójkąty ABD i AEC są podobne, gdyż $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CEA$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$. Wobec tego

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

więc warunek dany w zadaniu jest równoważny równości $2AP \cdot AQ = AD \cdot AE$.

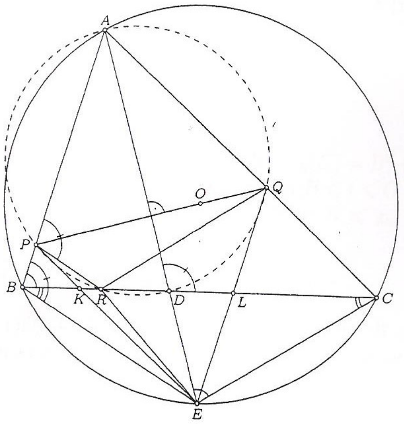
Ponieważ $AM = ME$, to $AP \cdot AQ = AD \cdot AM$, stąd

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{AP}{AD}. \tag{1}$$

Łącząc (1) z równością $\sphericalangle PAD = \sphericalangle MAQ$, uzyskujemy podobieństwo trójkątów APD i AMQ. W szczególności $\sphericalangle QMA = 90^\circ$ — co jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ. □

Sposób II: Niech E będzie punktem przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, którego środkiem jest punkt O. Ponieważ prosta AE jest dwusieczną kąta BAC to punkty P i Q są symetryczne względem AE, a więc czworokąt $APEQ$ jest deltoidem. Skoro $AO = OE$, to czworokąt ten jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ.

Bez szkody załóżmy, że $AB < AC$ (jeśli $AB = AC$, to rozumowanie przebiega analogicznie). Z równości $\sphericalangle DPA = \sphericalangle AQD = 90^\circ$ wynika, że na czworokącie $APDQ$ można opisać okrąg. Drugi punkt przecięcia tego okręgu z prostą BC oznaczmy przez R. Niech K i L oznaczają punkt przecięcia prostej BC z prostymi odpowiednio PE i QE (rys. 2). Zauważmy, że



rys. 2

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle EBC = \sphericalangle CEA + \sphericalangle DCE = \sphericalangle ADC = \\ = 180^\circ - \sphericalangle ADR = \sphericalangle RPA,$$

więc czworokąt $PBER$ jest trapezem. Analogicznie dowodzimy, że czworokąt $RECQ$ jest trapezem. Wynika stąd, że punkt R leży między punktami K i L.

Pola trójkątów PBR i PER są równe, gdyż trójkąty te mają wspólną podstawę PR i równe wysokości opuszczone na PR. Wobec tego pola trójkątów PBK i RKE też są równe. Podobnie, pola trójkątów REL i QLC są równe. Zatem

$$\begin{aligned}[APEQ] &= [APKLQ] + [KED] + [DEL] = \\ &= [APKLQ] + [RKE] + [REL] = \\ &= [APKLQ] + [PBK] + [QLC] = [ABC],\end{aligned}$$

gdzie symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczyliśmy pole figury $\mathcal{F}$.

Z powyższego rozumowania wynika, że $[BCQP] = [APQ] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[ABC] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[APEQ]$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $AQEP$ jest rombem. □

3. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna równa jest A. Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że jeżeli zastąpimy liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ odpowiednio przez $x_1 - A, x_2 - A, \ldots, x_{2n-1} - A$, to nierówność do udowodnienia w zadaniu nie zmieni się, gdyż średnia arytmetyczna nowych liczb wynosi 0. Oznacza to, że nie zmniejszymy ogólności przyjmując $A = 0$.

Przy takim założeniu prawa strona nierówności przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - 2x_n \sum_{i=1}^{2n-1} x_i + (2n-1)x_n^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + (2n-1)x_n^2.$$

Pozostaje wykazać, że $\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant (2n-1)x_n^2$.

Dla $n = 1$ żądana nierówność jest spełniona. Przyjmijmy $n \geqslant 2$ i oznaczmy przez B i C odpowiednio średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ oraz $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}$. Z założeń zadania wynika, że $B \leqslant x_n \leqslant C$. Ponadto zachodzi równość

$$0 = (2n-1)A = x_n + (n-1)(B + C).$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową oraz nierówności trójkąta wynika, że

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{n-1}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|}{n-1} \geqslant \frac{\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right|}{n-1} = |B|,$$

stąd $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geqslant (n-1)B^2$. Analogicznie dostajemy $\sum_{i=n+1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant (n-1)C^2$. Oznacza to, że spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant x_n^2 + (n-1)(B^2 + C^2).$$

Niech $g(t) = t^2 + (B + C - t)^2$. Ponieważ $g(B) = g(C) = B^2 + C^2$ oraz współczynnik przy t^2 funkcji g jest dodatni, tó dla $B \leqslant t \leqslant C$ zachodzi nierówność $g(t) \leqslant B^2 + C^2$. W szczególności skoro $B \leqslant x_n \leqslant C$, to zachodzi nierówność

$$B^2 + C^2 \geqslant g(x_n) = x_n^2 + (B + C - x_n)^2.$$

Z równości $(n-1)(B+C) + x_n = 0$ wynika, że liczby $B + C$ i x_n są przeciwnych znaków, więc $(B + C - x_n)^2 \geqslant x_n^2$. Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy $B^2 + C^2 \geqslant 2x_n^2$.

Ostatecznie

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant x_n^2 + (n-1)(B^2 + C^2) \geqslant (2n-1)x_n^2,$$

co było do okazania. □

Sposób II: Zastępując liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ odpowiednio przez $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots, x_{2n-1} - x_n$, możemy bez straty ogólności przyjąć, że $x_n = 0$. Dla $n = 1$ nierówność jest spełniona. Przyjmijmy $n \geqslant 2$. Mamy ciąg równości

$$2\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 - \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - 4A \sum_{i=1}^{2n-1} x_i + 2(2n-1)A^2 =$$

$$= \frac{2n-3}{2n-1} \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - \frac{4}{2n-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n-1} x_i x_j = \frac{1}{2n-1} \left(\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_i - x_j)^2 + 2 \sum_{n+1 \leqslant i < j \leqslant 2n-1} (x_i - x_j)^2 - 4 \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ n+1 \leqslant j \leqslant 2n-1}} x_i x_j \right).$$

Ponieważ $x_i x_j \leqslant 0$ dla $i \leqslant n \leqslant j$, to powyższa suma jest nieujemna. Oznacza to, że wyjściowa nierówność jest spełniona. □